

جستاری در شبکه‌های مختصات

دکتر مریم بیژن زاده
فوق دکتری علوم شبکه‌های عصبی

آیا Δ عددی صحیح است؟

$$P = 9u^2 + 3v^2$$

$$\Delta = \sqrt{(9u^2 + 3v^2)(6u^2)(3u^2 + v^2)(2v^2)}$$

$$= 6uv(3u^2 + v^2)$$

درواقع عبارت‌های (۱) طوری ساخته شده‌اند که Δ نیز عبارتی گویا به دست آید. بنابراین، به ازای هر مقدار صحیح u و v ، Δ عددی صحیح است. در جدول ۱ برخی از این مثلث‌ها را به ازای مقادیری از پارامترهای u و v به دست آورده‌ایم. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، با اختیار کردن مقادیر عددی برای پارامترهای u و v ، تعداد زیادی مثلث خاص که اضلاع و مساحت صحیح دارند، به دست می‌آید. این مثلث‌ها به لحاظ شکلی بسیار متنوع هستند.

اما نکته مهم این است: آیا جدول ۱ همه مثلث‌های مطلوب را به دست می‌دهد؟ قطعاً چنین نیست. زیرا مثلاً مثلث قائم‌الزاویه‌ای با ابعاد ۶، ۸ و ۱۰ دارای مساحت ۲۴ است، لیکن از عبارت‌های پارامتری (۱) حاصل نمی‌شود.

بنابراین مسئله را چنین بازطرح می‌کنیم: چگونه می‌توانیم همه مثلث‌های با اضلاع و مساحت صحیح را به دست آوریم؟ به نظر می‌رسد که این مسئله راه‌حل معمول هندسی نداشته باشد. درواقع آنچه از محتوای مسئله عایدمان می‌شود، مجهولات مسئله است؛ یعنی مثلث‌هایی خاص. اما هیچ

مقدمه

مساحت یک مثلث با طول اضلاع صحیح (عدد طبیعی)، در حالت کلی عددی صحیح نیست. با این حال، هرگاه طول اضلاع مثلثی برابر ۱۳، ۱۴ و ۱۵ باشد، مساحت آن نیز عددی طبیعی است:

$$P = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21 \quad \text{نصف محیط}$$

$$\Delta = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

$$= \sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 6} = 84 \quad \text{مساحت}$$

اکنون این پرسش مطرح می‌شود: مثلث‌های با طول اضلاع صحیح و مساحت صحیح کدام‌اند؟

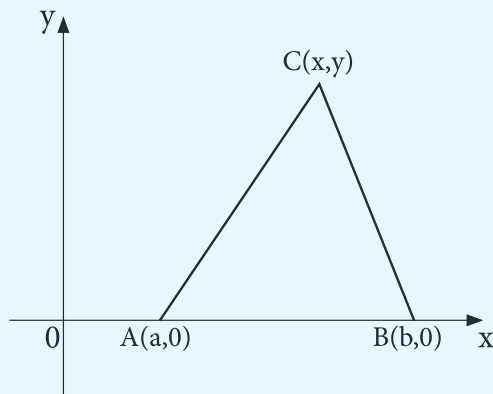
ابتدا این رابطه را یادآوری می‌کنیم که هرگاه شعاع دایره محیطی مثلث را برابر r فرض کنیم، بین مساحت مثلث، نصف محیط و شعاع رابطه زیر برقرار است:

$$\Delta = rP$$

فرض کنیم طول اضلاع یک مثلث برابر عددهای a و b و c باشد. پارامترهای u و v را چنان فرض می‌کنیم که:

$$(1) \quad a = 2u^2 + 2v^2, \quad b = 6u^2 + 2v^2, \quad c = 9u^2 + v^2$$

برای آنکه عددهای صحیح a ، b و c را چنان به دست آوریم که وافی به مقصود یعنی Δ صحیح باشد، پارامترهای u و v را کاوش می‌کنیم.



نکته

۱. این مسئله را از این نظر ارائه کردیم که خوانندگان به ارتباط جبر و هندسه بیشتر پی ببرند. برخی از مسائل تاریخی هندسی، راه حل هندسی ندارند و تنها با ابزارهای جبری حل و فصل شده‌اند. رنه دکارت، فیلسوف و ریاضی‌دان فرانسوی قرن هفدهم، اولین کسی بود که مفاهیم هندسه را به زبان جبری بیان کرد و ارتباط معنی‌داری بین این دو رشته مهم ریاضیات برقرار ساخت.

۲. به لحاظ نظریه‌های آموزش ریاضی، این نکته را یادآوری می‌کنیم که گرچه محتوای مسئله فاقد مفروض (دیتا) است، لکن با اختیار کردن برخی از اجزای مثلث، یعنی رأس‌های A و B و عدد K، در واقع مفروضاتی به مسئله اضافه شده است تا براساس «نظریه پردازش اطلاعات»^۱، با پردازش این اطلاعات در قالب عبارتهای جبری بتوان به رسم معمول به حل و بحث مسئله نائل شد.

۳. چون مسئله یک مسئله عددی است، می‌توان براساس مدل صفحه دکارتی مذکور نرم‌افزاری طراحی کرد که به آسانی همه مثلث‌های مطلوب را به نمایش بگذارد. لذا این مسئله می‌تواند تمرین مناسبی برای استفاده از فناوری در حل مسائل ریاضی باشد.

پی‌نوشت

1. Information Processing Theory

منابع

۱. جی. پی. میلر (۱۳۹۶). نظریه‌های برنامه‌داری. ترجمه دکتر محمود مهرمحمدی. انتشارات سمت. تهران.
2. Assessment in the mathematic classroom; Berinderjeat Kaur. Wong Khoon Yoong; World Scientific 2011.

جدول ۱

Δ	r	اضلاع	v	u
۲۴	۲	۱۰, ۸, ۶	۱	۱
۸۴	۴	۱۵, ۱۴, ۱۳	۲	۱
۱۵۶	۴	۳۷, ۲۶, ۱۵	۱	۲
۱۲۶	۳	۴۱, ۲۸, ۱۵	۱	۳
۴۲۶	۸	۵۱, ۳۸, ۲۵	۴	۱
۱۰۹۲	۱۲	۸۵, ۶۲, ۳۹	۲	۳
۱۱۷۶	۸	۱۴۵, ۹۸, ۵۱	۱	۴
۲۱۰	۵	۳۹, ۲۸, ۱۷	۵	۱
۵۷۰	۵	۱۱۳, ۷۶, ۳۹	۱	۵
۲۲۲۰	۲۰	۸۷, ۷۴, ۶۱	۵	۲
۳۰۹۶	۲۴	۹۷, ۸۶, ۷۵	۴	۳
۴۱۰۴	۲۴	۱۵۳, ۱۱۴, ۷۵	۳	۴
۳۹۲۴	۱۲	۳۲۵, ۲۱۸, ۱۱۱	۱	۶
۵۴۶	۷	۷۵, ۳۵, ۲۹	۷	۱

مفروضات مشخصی در دست نیست! باز هم توسل به جبر می‌تواند کلید راه حل مسئله باشد.

خلاصه حل: در صفحه مختصات دکارتی، دو نقطه متناظر با دو رأس مثلث مجهول در نظر می‌گیریم. برای سهولت در یافتن مجهولات، مناسب‌تر آن است که این دو نقطه را روی محور طول اختیار کنیم: فرض کنیم $A(a, 0)$ و $B(b, 0)$ دو رأس مثلث مجهول باشند.

A و B را چنان اختیار می‌کنیم که طول AB یعنی $b-a$ عددی صحیح و مثبت باشد: $b-a=k$. اکنون رأس سوم مجهول مسئله است. رأس سوم، یعنی $C(x, y)$ را چنان فرض می‌کنیم که فاصله‌های \overline{AC} و \overline{BC} و همچنین مساحت مثلث ABC عدهایی صحیح باشند.

هر سه این عدها بر حسب x و y به صورت عبارتهای جبری قابل محاسبه‌اند. اینک مسئله تبدیل می‌شود به اینکه x و y را چنان انتخاب کنیم که این عبارتها گویا و عددی صحیح باشند. پس مسئله مفروض هندسی به یک مسئله جبری تبدیل می‌شود. با تغییر k به نحوی که $K \in \mathbb{Z}$ و $K > 1$ همه مثلث‌های مطلوب به دست می‌آیند. به لحاظ تحلیل بیشتر این مسئله نکات زیر را یادآوری می‌کنیم: